

Vorlesung 8a

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 5:

Bedingte Verteilung mit X_2 als erster Stufe:

Die Formel von Bayes

(Buch S. 111-112, 116)

Bei der Untersuchung von zwei Zufallsvariablen X_1, X_2
kann man immer
zu einer **2-stufigen Betrachtungsweise** übergehen.

Man kann dabei wählen,
ob man X_1 als die erste Stufe auffasst oder als die zweite.
Wählt man X_1 als die zweite und X_2 als die erste Stufe,
dann schreibt sich die Multiplikationsformel als

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) \\ = \mathbf{P}(X_2 = a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1 | X_2 = a_2). \end{aligned}$$

Mit der *Formel für die totale Wahrscheinlichkeit*

$$\mathbf{P}(X_2 = a_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}(X_2 = a_2 | X_1 = a_1)$$

ergibt sich daraus eine Version der *Formel von Bayes*:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1 | X_2 = a_2) = \frac{\mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}(X_2 = a_2 | X_1 = a_1)}{\sum_{a' \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a') \mathbf{P}(X_2 = a_2 | X_1 = a')}$$

Beispiel: Erfolgreiche Würfe beim Münzwurf:

Wann kamen die erfolgreichen unter den ersten zehn Würfeln,
gegeben man kennt ihre Anzahl?

Bei einem 10-maligen p -Münzwurf sei

K die Anzahl der Erfolge,

und $G \subset \{1, \dots, 10\}$ die zufällige Menge der Zeiten,
zu denen die Erfolge eintreten.

Die bedingte Verteilung von K gegeben $G = a$ ist klar:

$$P(K = \#a \mid G = a) = 1.$$

Was ist die bedingte Verteilung von G , gegeben $\{K = 4\}$?

Für jede 4-elementige Teilmenge a von $\{1, \dots, 10\}$ ist
 $\mathbf{P}(\{G = a\} \cap \{K = 4\}) = \mathbf{P}(G = a) = p^4(1 - p)^6.$

Das hängt nicht von a ab.

Damit hängt auch $\mathbf{P}(G = a | K = 4)$ nicht von a ab,

also ist $\mathbf{P}(G \in \cdot | K = 4)$

die uniforme Verteilung

auf den 4-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, 10\}.$

Beispiel: Wie war der erste Schritt?

Es seien Y und Z unabhängige \mathbb{Z} -wertige Zufallsvariable und

$$X_1 := Y, X_2 := Y + Z.$$

Wir haben gesehen:

Die bedingte Verteilung von $Y + Z$, gegeben $\{Y = a\}$,
ist die Verteilung von $a + Z$.

Was ergibt sich für die bedingte Verteilung von Y ,
gegeben $\{Y + Z = b\}$?

“Wie war der erste Schritt?”

Die Gewichte der **gemeinsame Verteilung** von Y und $Y + Z$ kennen wir schon aus Teil 3.

Die bedingte Verteilung von Y , gegeben $Y + Z = b$, hat somit die Gewichte

$$\mathbf{P}(Y = a \mid Y + Z = b) = \frac{\mathbf{P}(Y = a) \mathbf{P}(Z = b - a)}{\mathbf{P}(Y + Z = b)}.$$

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und $\text{Geom}(p)$ -verteilt.

Dann ist

$$\mathbf{P}(Y = a) \mathbf{P}(Z = b - a) = q^{a-1} p q^{(b-a)-1} p = p^2 q^{b-2}.$$

Dieses hängt nicht von a ab. Also hängt auch

$$\mathbf{P}(Y = a | Y + Z = b) = \frac{p^2 q^{b-2}}{\mathbf{P}(Y + Z = b)} \text{ nicht von } a \text{ ab.}$$

Deshalb ist die bedingte Verteilung von Y gegeben

$$\{Y + Z = b\}$$

die uniforme Verteilung auf $\{1, \dots, b - 1\}$.

Das ist auch ohne Rechnung plausibel:

Gegeben, dass in einem p -Münzwurf
der zweite Erfolg beim b -ten Versuch kommt,
ist der Zeitpunkt des ersten Erfolges

uniform verteilt auf $\{1, \dots, b - 1\}$.

Beispiel: Exponentialverteilte Summanden

Y und Z seien unabhängig und $\text{Exp}(1)$ -verteilt.

Was ist die bedingte Dichte von Y , gegeben $\{Y + Z = b\}$?

Die gemeinsame Dichte von Y und $Y + Z$ ist (vgl. F8a3.6)

$$e^{-a} e^{-(b-a)} da db = e^{-b} da db, \quad 0 \leq a \leq b$$

Die Dichte von $Y + Z$ ist somit $\left(\int_0^b da\right) e^{-b} db = b e^{-b} db$

Also:

$$\mathbf{P}(Y \in da | Y + Z = b) = \frac{e^{-b}}{b e^{-b}} da = \frac{1}{b} da, \quad 0 \leq a \leq b.$$